

**Alledaags rekenen**

Marjolein Kool  
Ed de Moor

# Alledaags rekenen

We zullen het nog één keer uitleggen!



Deze uitgave kwam mede tot stand met  
financiële steun van de NVORWO

© 2016 Marjolein Kool & Ed de Moor  
Omslagontwerp Bart van den Tooren  
Lithografie afbeeldingen BFC Graphics & Design  
Opmaak Mat-Zet bv, Soest  
[www.uitgeverijbertbakker.nl](http://www.uitgeverijbertbakker.nl)  
ISBN 978 90 351 4388 3

Uitgeverij Bert Bakker is onderdeel van Uitgeverij Prometheus

# VOORWOORD

'Je kunt alles steeds beter begrijpen, zelfs de eenvoudigste zaken.' Hans Freudenthal (1905-1990)

**Marjolein Kool  
Ed de Moor**



**Rekenen is  
leuker dan ~~als~~  
je denkt**

**VERVOLG** 

'Ik reken nooit, daar heb je tegenwoordig machines voor. Maar nu moet ik snel weg, want het is al kwart voor tien en mijn trein gaat om drie over. Gelukkig heb ik een ov-fiets genomen. Al moet ik die nog wel inleveren. Dat kost ook weer een paar minuten. App je me de eindstand? Dan weet ik wat ze in de thuiswedstrijd minstens moeten scoren. Kom je die bij mij kijken? De 23ste valt op een woensdag. Ik haal genoeg bier in huis. Doe!' En weg was onze 'niet-rekenende' vriend.

Zou hij werkelijk niet beseffen hoe vaak hij met cijfers en getallen in de weer is? Hoe vaak hij op een klok, weegschaal, thermometer of kilometerteller kijkt? Hoe vaak hij bankafschriften, prijskaartjes, verkeersborden, sportuitslagen en paginanummers onder ogen krijgt? Zou hij zich niet realiseren dat hij met die alledaagse getallen voortdurend aan het rekenen is? 'Heb ik nog voldoende geld voor die zonnebril? Zit er nog genoeg benzine in mijn tank om de volgende pomp te halen? Laat ik me geen oor aannaaien door een internetprovider met een "leuke" aanbieding? O ja, ik moet mijn VM1 in de gaten houden.'

Als je het *alledaags rekenen* beheerst, houd je controle op het reilen en zeilen van alledag. Dat is goed voor je portemonnee, voor je gezondheid én voor je hoofd, want *denkend rekenen* houdt je hersens lenig. Het belang van denkend rekenen beschreven we al in ons boek *Rekenen is leuker dan als je denkt*. In dit nieuwe boek proberen we het alledaagse denkende rekenen in 100 plaatjes en 100 verhalen te vangen. We gingen op zoek naar opmerkelijke krantenkoppen, kassabonnen, advertenties, voorwerpen, uitspraken, situaties... en koppelden die aan allerlei rekenvragen, -problemen, -ideeën, en -onderwerpen. We beginnen het alledaags rekenen met elementaire vaardigheden als 'onder elkaar aftrekken', 'staartdelen', 'delen door een breuk' en zo meer. Ook al beheers je deze algoritmen perfect, als je erover na gaat denken zul je ontdekken dat je ze steeds beter kunt begrijpen.

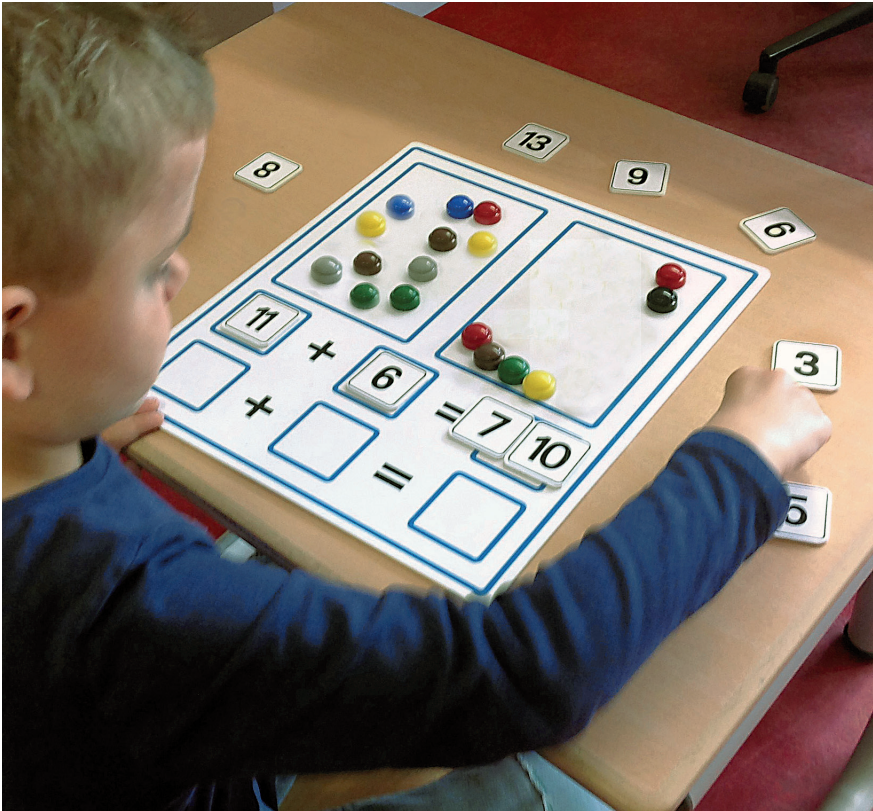
Sommige alledaagse vragen zijn niet zo makkelijk. Hoe worden bankbiljetten beschermd via cijfercodes? Wat is de systematiek van de nummerplaten van auto's? Waarom hebben de pasjes in je portemonnee allemaal dezelfde afmetingen? Waarom moet je van speelautomaten afblijven? We proberen de denkwijzen om deze rekenvragen op te lossen zo eenvoudig mogelijk weer te geven, maar mocht het je soms toch boven de pet gaan, sla het stukje dan gewoon over. Dit boek is geen systematisch leerboek. Of je het nu van kافت tot kافت leest of alleen de krenten uit de pap pikt, je zult ervaren dat we in het gewone leven steeds weer met getallen en rekensituaties geconfronteerd worden.

We hebben met heel veel rekenplezier aan dit kijk-, denk- en rekenboek gewerkt en we wensen onze lezers minstens evenveel rekenplezier toe.

Marjolein Kool en Ed de Moor

# WORSTELLEN MET PLAATSWAARDE

Cijfer, getal, tientalig of decimaal positiesysteem

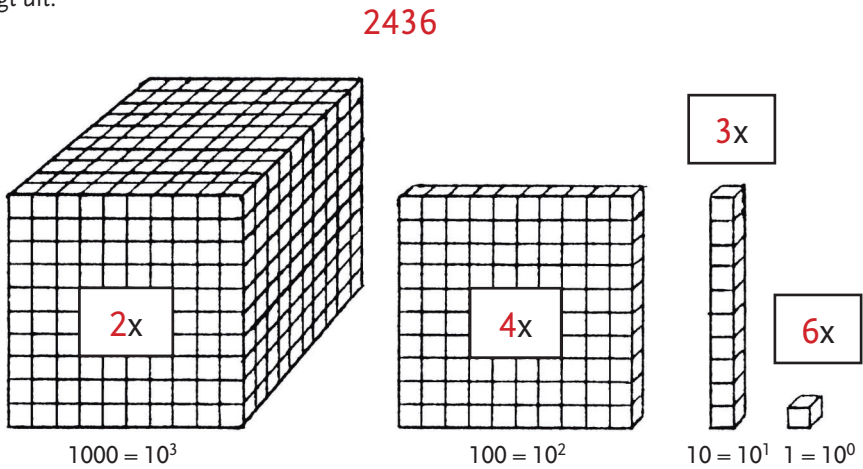


$11 + 6 = 710$ ??? Hoe komt dit kind nou aan zo'n antwoord?

De Engelsen hebben het getroffen met de manier waarop zij hun getallen uitspreken. Ze kunnen immers gewoon de leesrichting – van links naar rechts – aanhouden. Zij zeggen *twenty-three* voor 23, terwijl wij rechts moeten beginnen en ‘driewintig’ zeggen. Als wij het getal 235 uitspreken noemen we eerst de 2, dan de 5 en dan de 3. En dan zeggen we ook nog ‘dertig’ in plaats van ‘drietig’. Je staat er niet vaak bij stil, maar bedenk eens hoe wij bijvoorbeeld het getal 123.456 uitspreken en vraag je af hoe kinderen dit ooit leren.

De kleuter op de foto weet hoe hij 11 en 6 moet noteren, en dat de som van die twee getallen 17 is. Hij weet alleen niet hoe hij die uitkomst moet noteren. ‘710’ lijkt voor hem een logische notatie voor ‘zeventien’. Het kind weet kennelijk nog niet dat elk *cijfer* in het *getal* vermenigvuldigd moet worden met zijn positiewaarde:

$17 = 1 \times 10 + 7 \times 1$ . Om te begrijpen wat een getal als bijvoorbeeld 2436 werkelijk betekent, kun je het weergeven met decimale rekenblokken. Dit materiaal bestaat uit eenheden, tientallen, honderdtallen en duizendtallen. Het getal 2436 ziet er als volgt uit.



Je kunt de blokkenweergave in een formele notatie omzetten:

Of:  $2436 = 2 \times 1000 + 4 \times 100 + 3 \times 10 + 6 \times 1$   
 $2436 = 2 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 6 \times 10^0$

1, 10, 100, 1000... zijn de positiewaarden en het principe is na  $10^3$  nog eindeloos voort te zetten. De kleuter op de foto heeft het *tientallige of decimale positieysteem* nog niet helemaal onder de knie. Dat is niet erg. Dat komt vast nog wel goed. Als hij over een paar jaar ‘ $850 + 460 = 100220$ ’ opschrijft wordt het pas echt tijd om je zorgen te maken. Vraag je je af wat hier aan de hand is? Als het kind zijn systeem consequent zou volhouden, zou hij dit sommetje hardop voorlezen als: ‘acht en vijftig en vier en zestig is honderd, twee en twintig’. Dit is natuurlijk een beetje flauw, maar als je dit soort onzin leest raak je wel overtuigd van de schoonheid van ons ordelijke en overzichtelijke getallensysteem.

# KAN EEN AAP REKENEN?

---

Positiesysteem



Apen kunnen getalsymbolen herkennen en betekenis geven.  
Maar kunnen ze ook rekenen?

Amerikaanse neurobiologen publiceerden in 2014 het opzienbarende nieuws dat apen kunnen leren rekenen. Ze hadden drie mannelijke resusaapjes symbolen geleerd voor de getallen van 1 tot en met 25. Voor de eerste negen getallen gebruikten ze de cijfers van 1 tot en met 9, voor de rest letters. De apen kregen een beloning als ze van twee getallen het grootste aanwezen. Dat lukte. Vervolgens ontdekten de apen dat wijzen naar een cirkel waar de getallen 3 en 6 samen in stonden een grotere beloning opleverde dan wijzen naar een cirkel met 8. En dat ze beter 7 konden aanwijzen dan 2 en 3. Dat is indrukwekkend! Maar is hiermee aangetoond dat apen kunnen rekenen?

Dankzij ons tientallige *positiesysteem* kunnen we met 10 symbolen – de cijfers van 0 tot en met 9 –, eindeloos grote getallen construeren omdat we ze combineren met getalposities. Neem bijvoorbeeld het getal 27. Je weet dat het cijfer 2 staat voor twee tientallen, en het cijfer 7 voor zeven eenheden. Daarom is 27 iets anders dan 72. Je weet dat het getal 8125 staat voor 8 **duizendtallen**, 1 **honderdtal**, 2 **tientallen** en 5 **eenheden**. Niet omdat je dat uit je hoofd hebt geleerd, maar omdat je het systeem kent.

$$8125 = 8 \times 1000 + 1 \times 100 + 2 \times 10 + 5 \times 1 = 8000 + 100 + 20 + 5$$

1000	100	10	1
8	1	2	5

Is in een getal een bepaalde positie leeg, dan noteer je op die plek een nul.

Het tientallige en positionele karakter van ons getallensysteem maakt het mogelijk om grote getallen vlot cijferend onder elkaar op te tellen, af te trekken, te vermenigvuldigen en te delen. Hoe zit dat met kleine getallen? Alle optellingen tot 25 kun je misschien nog lukraak zonder kennis van rekenregels in je geheugen prenten.

Hoewel? Het gaat om  $25 \times 25 = 625$  sommetjes, of 325 als je de omkeringen niet meetelt. Zo is bijvoorbeeld  $3 + 4 = 4 + 3$  Maar er zijn ook optellingen van meer dan twee termen, zoals bijvoorbeeld  $2 + 3 + 9$ , en dat maakt het aantal combinaties enorm. Gelukkig hoeven we die niet allemaal uit ons hoofd te leren. We hebben genoeg aan een beperkte hoeveelheid parate basiskennis en combineren die kennis met enkele rekenregels, zodat we daarmee systematisch de uitkomst van elke optelling kunnen uitrekenen. Dat ontlast het geheugen enorm. Ook voor aftrekken, vermenigvuldigen en delen beschikken we over systematische rekenregels.

De apen in het experiment leerden 25 verschillende tekens voor de getallen van 1 tot 25. Aan die tekens werd geen positiesysteem verbonden. Ze konden dus geen systematische rekenregels toepassen, alleen maar sommetjes uit hun hoofd leren. De apen hebben een indrukwekkend geheugen, dat heeft het experiment aangetoond, maar systematisch rekenen? Dat lijkt voor apenkoppen toch iets te hoog gegrepen.

# HOE LAAT IS HET?

Romeinse cijfers, additief getallensysteem



De negen en de elf op de wijzerplaat zijn omgewisseld, maar dat valt bijna niemand op. Waarom kunnen we toch gewoon de tijd aflezen op zo'n 'foute' klok?

Op de klok van de Amsterdamse Obrechtkerk zijn de Romeinse getallen voor 9 (IX) en 11 (XI) omgewisseld. Het viel me pas kortgeleden op. Klokkijken is kennelijk meer een kwestie van het interpreteren van de lengte van de wijzers en de hoek ertussen dan een getalsmatige kwestie. Zelfs horloges zonder cijfers kunnen we nog aflezen.

Het Romeinse getallensysteem kent zeven cijfers. M = 1000; D = 500; C = 100; L = 50; X = 10; V = 5; I = 1. Het jaartal MDCLXVI staat dus voor 1666. De Romeinse cijfers zijn getsymbolen, geen letters. Ze zijn voortgekomen uit turven. 10 streepjes werden gebundeld tot een kruisje (X) en de helft daarvan is 5 (V). Bij M = 1000 kun je aan het Latijnse woord 'mille' denken en bij C = 100 aan 'centum'. Soms worden de Romeinse cijfers tóch wel als letters in een tekst gebruikt. Zie bijvoorbeeld de gevelsteen van het St. Barbara Vrouwen Gasthuys te Haarlem. Wie de hoofdletters verzamelt, vindt zo het stichtingsjaartal.



OMdat **V**VII oVt ende behoeft**I**CH s**C**henen **V**erLaten  
 Heeft **H**Vgo Van Assende**L**f hler gest**I**cht tonser baten  
 $1 \times M + 3 \times C + 2 \times L + 6 \times V + 5 \times I = 1435$

Het Romeinse getallensysteem is *additief*. Dat betekent dat de plaats van de cijfers in het getal niet van belang is. Dat blijkt al uit het Haarlemse tijdvers. In de achttiende eeuw verschenen bekortingen: **IV** = 4; **IX** = 9; **XL** = 40; ... **XC** = 90; **CM** = 900. In deze combinaties is de volgorde van de tekens wél van belang.

In het Romeinse systeem is geen nul nodig. En met Romeinse cijfers werd niet gerekend. Dat deed men met steentjes of penningen op een abacus of rekenbord met lijnen, waarna de uitkomst in Romeinse cijfers werd genoteerd.

Om de betekenis van de zeven Romeinse cijfers te onthouden zijn er ezelsbruggetjes bedacht. Zoals bijvoorbeeld: **I**k **V**erving **X**anders **L**ekkere **C**itroenen **D**oor **M**andarijnen. Maar ja, hoe onthoud je dat nou weer?

# TWAALF

---

Tellen met een ander grondtal



22

Hoe zouden we tellen als we met twaalf vingers geboren zouden zijn?

Wil je even lachen? Kijk dan op YouTube naar het filmpje *Dames in de Dop* bij Jensen, waar de quizmaster aan Sharon vraagt hoeveel eieren er in een dozijn zitten. 'Dat ligt eraan of je een pakje van zes of van tien neemt,' antwoordt het blondje. De lezer weet hopelijk wél dat een dozijn twaalf is en dat we het getal twaalf op meer plekken in het dagelijks leven tegenkomen, denk aan de klok en de kalender.

Omdat we tien vingers hebben is ons getallensysteem tientallig, maar als we allemaal met twaalf vingers waren geboren hadden we vermoedelijk een getallensysteem met 12 als grondtal gehad. De eerste positie (rechts in het getal) heeft dan de positiewaarde  $12^0$ , de volgende  $12^1$ , daarna  $12^2$ , enzovoort. Als je in het twaalftallige systeem gaat tellen begin je natuurlijk ook met 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9... maar je kunt achter 9 niet 10 schrijven, want 10 betekent in het twaalftallige systeem

$1 \times 12^1 + 0 \times 12^0$ . Dus moeten we twee nieuwe cijfers bedenken voor de telgetallen tien en elf, bijvoorbeeld  $\square$  voor tien en  $\triangle$  voor elf. Twaalftallig tellen gaat dan als volgt:

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	$\square$ ,	$\triangle$ ,	10,
11,	12,	13,	14,	15,	16,	17,	18,	19,	$1\square$ ,	$1\triangle$ ,	20,
21,	22,	.....						29,	$2\square$ ,	$2\triangle$ ,	30,
31,	32,	.....									
...											
91,	92,	.....						99,	$9\square$ ,	$9\triangle$ ,	$\square 0$ ,
$\square 1$ ,	$\square 2$ ,	$\square 3$ ,	$\square 4$ ,	$\square 5$ ,	$\square 6$ ,	$\square 7$ ,	$\square 8$ ,	$\square 9$ ,	$\square\square$ ,	$\square\triangle$ ,	$\triangle 0$ ,
$\triangle 1$ ,	$\triangle 2$ ,	$\triangle 3$ ,	$\triangle 4$ ,	$\triangle 5$ ,	$\triangle 6$ ,	$\triangle 7$ ,	$\triangle 8$ ,	$\triangle 9$ ,	$\triangle\square$ ,	$\triangle\triangle$ ,	<b>100</b>

**100** in het twaalftallig stelsel betekent tientallig  $1 \times 12^2 + 0 \times 12^1 + 0 \times 12^0 = 144$ . Je ziet dat twaalftallig tellen niet meevalt, zeker niet als je de getallen hardop gaat uitspreken. Dat krijg je niet zomaar routinematig onder de knie. Is het niet wonderbaarlijk dat we in het tientallig stelsel wél feilloos en vlot kunnen tellen? Dat is de verdienste van dagelijks oefenen van jongs af aan en tien vingers hebben. Zou je met twaalf vingers geboren worden en opgroeien in een omgeving waar het twaalftallig stelsel gebruikelijk is, dan zou je net zo vaardig twaalftallig leren tellen als je nu tientallig kunt. Bij hoofdrekenen in het grondtal 12 zijn er zelfs voordelen ten opzichte van 10 omdat je 12 makkelijk door 2, 3, 4 en 6 kunt delen. In het twaalftallig stelsel geldt

$$\frac{1}{3} = \frac{4}{10} = 0,4. \text{ Dat is makkelijk! Of vind je van niet?}$$

Dozijn wordt nauwelijks meer gebruikt en gros ( $12 \times 12$ ) nog veel minder. Maar wat doen we nu met Sharon? Die zetten we op de groslijst van domste blondjes aller tijden.

# OP JE VINGERS TELLEN

---

Binair of tweetallig stelsel



1111111111 = 1023



000011100 = 28



0001110000 = ...?

Bovenaan wordt het getal 1023 uitgebeeld, in het midden het getal 28.  
Welk getal zien we onderaan?

Het binaire of tweetallige stelsel heeft maar twee cijfers: 0 en 1. Toch kun je daar eindeloos ver mee tellen en onbeperkt mee rekenen. In een binair getal is elk cijfer 1 of 0 keer een macht van 2. De positiewaarden zijn achtereenvolgend  $2^0$ ,  $2^1$ ,  $2^2$ ,  $2^3$ ,  $2^4$ , enzovoort. Het binaire getal 11 betekent decimaal  $1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 2 + 1 = 3$ . Op de plaatjes hiernaast staat elke vinger voor een macht van 2. De linkerpink, voor de kijkers rechts, representeert  $2^0$ , de ringvinger daarnaast  $2^1$  enzovoort. Als je alle vingers opsteekt, zie je het binaire getal 1111111111, en daarvan kun je gaande van links naar rechts de decimale waarde berekenen.

Het binaire getal 1111111111 komt overeen met  
 $1 \times 2^9 + 1 \times 2^8 + 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + \dots + 1 \times 2^0 = 512 + 256 + 128 + 64 + \dots + 1 = 1023$ .

Op het middelste plaatje tonen de vingers het binaire getal 11100 dat overeenkomt met  $1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 28$ . Wie het onderste getal herleidt, vindt het nationale alarmnummer.

Omgekeerd kun je natuurlijk een decimaal getal omrekenen naar een binair getal. Neem bijvoorbeeld 39, dat is  $1 \times 32 + 0 \times 16 + 0 \times 8 + 1 \times 4 + 1 \times 2 + 1 \times 1$  oftewel  $1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$ . Het decimale getal 39 komt dus overeen met het binaire getal 100111.

We zagen hierboven dat 10 vingers omhoog binair 1111111111 betekent en decimaal 1023. Je weet  $1023 + 1 = 1024 = 2^{10}$ . Dat is binair genoteerd een 1 met tien nullen. Dus in het binaire talstelsel geldt:  $1111111111 + 1 = 1000000000$ .

Wie lenige vingers heeft kan met zijn handen 1024 verschillende binaire getallen tonen. Dit lukt omdat in het binaire getallensysteem elke getalpositie slechts twee waarden kan hebben, 0 of 1, niet of wel, vinger omhoog of vinger omlaag. Het binaire getallenstelsel is ontwikkeld door de Duitse wiskundige en filosoof Leibniz (1646-1716). Hij was zijn tijd ver vooruit, want hij dacht al aan een rekenmachine die met binaire getallen zou kunnen rekenen. Inderdaad werken onze hedendaagse computers in feite met een binair systeem.

Binair rekenen is makkelijker dan decimaal rekenen. Je hoeft maar een paar regeltjes te onthouden. De optelregels zijn  $0 + 0 = 0$ ;  $1 + 0 = 1$  en  $1 + 1 = 10$ . En er zijn maar twee basisvermenigvuldigingen, namelijk  $0 \times 1 = 0$  en  $1 \times 1 = 1$ . Met die regels heb ik hier rechts  $101 \times 1010$  cijferend uitgerekend. Het kost wat papier, maar het is in feite heel simpel. Of vind je  $5 \times 10 = 50$  toch makkelijker?

Wiskundigen zeggen wel: 'Er zijn 10 soorten mensen: zij die het binaire getallenstelsel snappen en zij die het niet snappen.' Waar hoor jij bij?

$$\begin{array}{r}
 1010 \\
 \underline{101} \times \\
 1010 \\
 00000 \\
 \underline{101000} \\
 110010
 \end{array}$$